Bondad del ajuste en el modelo de regresión lineal

Contents

Estamos interesados en evaluar como de bueno es el modelo que se ha estimado. La calidad del modelo se puede calcular utilizando diferentes métricas:

1 Coeficiente de determinacion R^2

Dado unos datos $(x_{1i}, \ldots, x_{ki}, y_i), \; i = 1, \ldots, n$, se estima el modelo de regresión lineal

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + u_i$$

obteniendo

$$y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ki} + e_i$$

Es usual definir

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ki}$$

por lo que

$$y_i = \hat{y}_i + e_i$$

Ya hemos visto que a partir de esta expresión se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

$$SST = SSM + SSR$$

donde:

- SST: suma de cuadrados total
- SSM: suma de cuadrados correspondientes al modelo.
- SSR: suma de cuadrados correspondientes a los residuos.

Es decir, dividimos la suma de cuadrados total entre modelo y residuos. Por tanto es lógico definir un coeficiente dividiendo *SSM* entre *SST*, es decir, calcular el porcentaje de la suma de cuadrados que corresponde al modelo. Dicho coeficiente se llama **coeficiente de determinación**:

$$R^2 = \frac{SSM}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

Este coeficiente toma valores entre 0 y 1:

- Si el modelo es bueno, la suma de cuadrados del modelo será grande, $R^2 \approx 1$.
- Si el modelo es malo, los suma de cuadrados del modelo será pequeña, $R^2 \approx 0$.

2 Coeficiente de determinacion ajustado R_a^2

El coeficiente de determinación se ha definido como

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{(n-k-1)\hat{s}_R^2}{(n-1)\hat{s}_y^2}$$

Imaginemos que $\beta_k = 0$, es decir, que el regresor x_k no aporta información al modelo. Entonces podríamos estimar el modelo:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \cdots + \beta_{k-1} x_{(k-1)i} + u_i$$

con R_1^2. En principio se debería cumplir que $R^2 = R_1^2$. Sin embargo,

$$(n-(k-1)-1) > (n-k-1)$$
$$(n-k)\hat{s}_R^2 > (n-k-1)\hat{s}_R^2$$

$$\frac{(n-k)\hat{s}_R^2}{(n-1)\hat{s}_y^2} > \frac{(n-k-1)\hat{s}_R^2}{(n-1)\hat{s}_y^2}$$

$$-\frac{(n-k)\hat{s}_R^2}{(n-1)\hat{s}_y^2} < -\frac{(n-k-1)\hat{s}_R^2}{(n-1)\hat{s}_y^2}$$

$$1-\frac{(n-k)\hat{s}_R^2}{(n-1)\hat{s}_y^2} < 1-\frac{(n-k-1)\hat{s}_R^2}{(n-1)\hat{s}_y^2}$$

$$R_1^2 < R^2$$

Por tanto, el coeficiente de determinación disminuye al aumentar el número de regresores k, aunque esos regresores no aporten información al modelo. Por este motivo se define el coeficiente de determinación ajustado:

$$R_a^2 = 1 - \frac{\hat{s}_R^2}{\hat{s}_y^2} = 1 - \frac{SSR/(n-k-1)}{SST/(n-1)} = 1 - \frac{SSR}{SST}\frac{(n-1)}{(n-k-1)}$$

Cuando comparamos modelos con diferente número de regresores es preferible utilizar R_a^2.

3 Ejemplo

```r
d = read.csv("datos/kidiq.csv")
d$mom_hs = factor(d$mom_hs, labels = c("no", "si"))
d$mom_work = factor(d$mom_work, labels = c("notrabaja", "trabaja23", "trabaja1_parcial", "trabaja1_compl
```

```r
m1 = lm(kid_score ~ mom_iq + mom_age + mom_hs + mom_work, data = d)
summary(m1)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = kid_score ~ mom_iq + mom_age + mom_hs + mom_work,
##     data = d)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -54.414 -12.095   2.015  11.653  49.100
##
## Coefficients:
##                         Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)             20.27273    9.39320   2.158   0.0315 *
## mom_iq                   0.55288    0.06138   9.008   <2e-16 ***
## mom_age                  0.21629    0.33351   0.649   0.5170
## mom_hssi                 5.43466    2.32518   2.337   0.0199 *
## mom_worktrabaja23        2.98266    2.81289   1.060   0.2896
## mom_worktrabaja1_parcial  5.48824    3.25239   1.687   0.0922 .
## mom_worktrabaja1_completo 1.41929    2.51621   0.564   0.5730
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 18.14 on 427 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.2213, Adjusted R-squared:  0.2103
## F-statistic: 20.22 on 6 and 427 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

```r
m2 = lm(kid_score ~ mom_iq + mom_age + mom_hs, data = d)
summary(m2)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = kid_score ~ mom_iq + mom_age + mom_hs, data = d)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -53.289 -12.421   2.399  11.223  50.169
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 20.98466    9.13013   2.298   0.0220 *
## mom_iq       0.56254    0.06065   9.276   <2e-16 ***
## mom_age      0.22475    0.33075   0.680   0.4972
## mom_hssi     5.64715    2.25766   2.501   0.0127 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 18.15 on 430 degrees of freedom
```

```
## Multiple R-squared:  0.215,  Adjusted R-squared:  0.2095
## F-statistic: 39.25 on 3 and 430 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Se tiene que $R_{a1}^2 = 0.2103$, $R_{a2}^2 = 0.2095$. Por tanto no hay mucha diferencia entre los modelos a pesar de que el modelo m1 utiliza más regresores. Esto seguramente se debe al hecho de que la variable *mom_work* no es significativa. Para comprobarlo utilizamos el contraste

- H_0 : Los modelos m1 y m2 son equivalentes.
- H_1 : Los modelos m1 y m2 NO son equivalentes.

```
anova(m1,m2)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Model 1: kid_score ~ mom_iq + mom_age + mom_hs + mom_work
## Model 2: kid_score ~ mom_iq + mom_age + mom_hs
##   Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F Pr(>F)
## 1    427 140471
## 2    430 141605 -3   -1134.2 1.1493 0.3289
```

El p-valor > 0.05, no se rechaza la hipótesis nula, los modelos son equivalentes, la variable *mom_work* no es significativa.